7. Endomorphismes

7.1. Définition

Une application linéaire de E vers E est appelée **endomorphisme** de E.

Deux exemples

1. L'application définie par $f((x\,;y)) = (y\,;x)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. En effet, cette application est linéaire et définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

2. On considère l'espace vectoriel P_3 des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et la base $B = (1\,;x\,;x^2\,;x^3)$. L'application qui associe à chaque fonction polynôme sa fonction dérivée est un endomorphisme de P_3.

   Sa matrice relativement à la base B est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.1

Les applications suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?

a. $f: (x\,;y) \to (x\,;xy)$
b. $f: (x\,;y) \to (x^2\,;0)$
c. $f: (x\,;y) \to (x+1\,;y)$
d. $f: (x\,;y) \to (x-y\,;2x+4y)$

7.2. Endomorphisme bijectif (automorphisme)

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E. Si f est bijectif, alors sa réciproque ${}^rf$ est aussi un endomorphisme bijectif de E. On a alors $f \circ {}^rf = {}^rf \circ f = id_E$.
On considère f et g, deux endomorphismes bijectifs de E. L'endomorphisme $g \circ f$ est bijectif et ${}^r(g \circ f) = {}^rf \circ {}^rg$.

Théorème 7.1

Si f est un endomorphisme bijectif d'un espace vectoriel E muni d'une base B, alors la matrice A de f, relativement à la base B, est une matrice inversible.
La matrice de ${}^rf$ est A^{-1}.

Théorème 7.2

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E dans lequel on a choisi une base B. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'endomorphisme f est bijectif.
2. La matrice de f relative à la base B est inversible.
3. Les images des vecteurs de la base B forment une base de E.
4. L'endomorphisme f est injectif.
5. L'endomorphisme f est surjectif.
6. La dimension du noyau de f est zéro.
7. La dimension de l'image de f est égale à la dimension de E.

Exercice 7.2

On considère une base $B = (e_1\,;e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et un vecteur quelconque $u = xe_1 + ye_2$.
Les applications f suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?
Déterminez les matrices des endomorphismes relativement à la base B.
Déterminez les endomorphismes bijectifs et les matrices de leur réciproque relativement à la base B.

a. $f: u \to -2u$
b. $f: u \to u + e_1$
c. $f: u \to ye_1 - xe_2$
d. $f: u \to (-2y-3x)e_1 + (x+y)e_2$
e. $f: u \to 2e_1 - 3e_2$
f. $f: u \to (1+y)e_2$

Exercice 7.3 Déterminez l'image et le noyau des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants définis par leur matrice relativement à la base canonique B ($a \in \mathbb{R}$).

a. $M = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $M = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **c.** $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

d. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **e.** $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a & 2 \end{pmatrix}$ **f.** $M = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

7.3. Changement de base

Matrice de changement de base

Considérons un espace vectoriel E de dimension 2, par exemple $\mathbb{R}^2$. Soient deux bases de E, $B = (e_1\,;\, e_2)$ et $B' = (e'_1\,;\, e'_2)$. Exprimons e'_1 et e'_2 dans la base B :

Rappel
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e'_1 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 \Rightarrow e'_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\qquad e'_2 = c \cdot e_1 + d \cdot e_2 \Rightarrow e'_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

Soit un vecteur quelconque v. Il peut s'écrire de deux manières :

Première manière, dans la base B

$$v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Seconde manière, dans la base B'

$$v = x' \cdot e'_1 + y' \cdot e'_2 = x'(a \cdot e_1 + b \cdot e_2) + y'(c \cdot e_1 + d \cdot e_2) = (x' \cdot a + y' \cdot c) \cdot e_1 + (x' \cdot b + y' \cdot d) \cdot e_2$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} x' \cdot a + y' \cdot c \\ x' \cdot b + y' \cdot d \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cdot a + y' \cdot c \\ x' \cdot b + y' \cdot d \end{pmatrix}$, que l'on peut aussi écrire : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle la matrice $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la **matrice de changement de base** (de B' vers B).

Soient V la matrice colonne comprenant les composantes de v dans la base B ;
V' la matrice colonne comprenant les composantes de v dans la base B'.
Avec ces notations, on a : $P \cdot V' = V$, donc $V' = P^{-1} \cdot V$.
La matrice P est inversible puisque e'_1, e'_2 est une base dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple

Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

On a immédiatement $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans la base B', le vecteur V s'écrit $V' = P^{-1} V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que $P V' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = V$.

La même démarche est possible pour un espace vectoriel de dimension n. Connaissant les composantes d'un vecteur v dans une base B, il faut, pour obtenir les composantes de v dans une autre base B' :

1. écrire la matrice P dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de la nouvelle base B' relativement à l'ancienne base B
2. calculer la matrice inverse P^{-1}
3. effectuer le produit matriciel $P^{-1} \cdot V$

Matrice d'un endomorphisme dans une nouvelle base

Soit un endomorphisme h de E de matrice M dans une base B. Déterminons la matrice M' de cet endomorphisme dans une nouvelle base B' de E.

Soit un vecteur quelconque u de E et son image v par l'endomorphisme h.
Notons U et V les matrices colonnes des composantes de u et v dans la base B.
U' et V' les matrices colonnes des composantes de u et v dans la base B'.
P la matrice de changement de base $B' \to B$.

Pour obtenir l'image par l'endomorphisme h du vecteur u de E dans la base B', il faut, dans l'ordre :

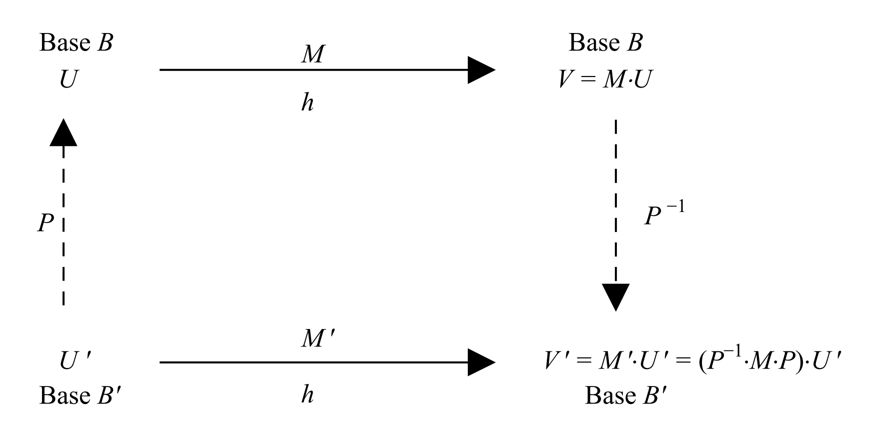
1. calculer les composantes de u dans la base B' : U'
2. calculer les composantes de u dans la base B : $U = P \cdot U'$
3. calculer les composantes de $h(u) = v$ dans la base B : $V = M \cdot U = M \cdot (P \cdot U')$
4. calculer les composantes de $h(u) = v$ dans la base B' : $V' = P^{-1} \cdot V = P^{-1} \cdot (M \cdot (P \cdot U'))$.

La multiplication matricielle étant associative, on a $V' = (P^{-1} \cdot M \cdot P)U'$.
Cette image s'obtient également directement : $V' = M' \cdot U'$.

En comparant ces deux égalités, on voit que : $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$.

Schéma





Exemple Considérons l'endomorphisme h de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $B = (e_1 ; e_2)$ et la base $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On calcule :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.4

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $B = (e_1 ; e_2)$, on donne l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base B.

Soient les vecteurs $u = (2 ; 1)$, $v = (-1 ; 1)$, $w = (4 ; -3)$.
Soient les nouvelles bases $B_1 = (e_2 ; e_1)$, $B_2 = (e_1 + e_2 ; 3e_2)$, $B_3 = (u ; v)$.

a. Calculez les composantes des vecteurs u, v et w dans chacune de ces bases.
b. Déterminez la matrice de l'endomorphisme h relativement à chacune de ces bases.

Exercice 7.5

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $B_0 = (e_1 ; e_2)$, on considère quatre vecteurs :

$$a_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix},\ b_1=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

Après avoir vérifié que $B_1 = (a_1 ; a_2)$ et $B_2 = (b_1 ; b_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$, établissez les matrices de passage...

a. de la base B_1 à la base B_0 — **b.** de la base B_0 à la base B_1
c. de la base B_2 à la base B_0 — **d.** de la base B_0 à la base B_2
e. de la base B_2 à la base B_1 — **f.** de la base B_1 à la base B_2

Exprimez le vecteur (1 ; 1) dans les trois bases et utilisez ces trois vecteurs pour vérifier que vos matrices de passage sont exactes.

Exercice 7.6

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base $B = (e_1 ; e_2 ; e_3)$, on donne l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\1 & -2 & 0\\-1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ dans la base B.

Soient les vecteurs $u = (1 ; 1 ; 1)$, $v = (1 ; 1 ; 0)$, $w = (5 ; -2 ; 3)$. Soient les nouvelles bases $B_1 = (e_3 ; e_2 ; e_1)$, $B_2 = (u ; v ; e_1)$.

a. Calculez les composantes des vecteurs u, v et w dans chacune de ces bases.

b. Déterminez la matrice de l'endomorphisme h relativement à chacune de ces bases.

7.4. Valeurs propres et vecteurs propres

Remarquez que $h(0) = 0$ est toujours vrai.

Soit h un endomorphisme d'un espace vectoriel E. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de h s'il existe (au moins) un vecteur $u \neq 0$ de E tel que :

$$h(u) = \lambda u$$

Un tel vecteur u est appelé **vecteur propre** associé à λ.

On note E_λ l'ensemble de tous les vecteurs de E tels que $h(v) = \lambda v$. Il s'appelle le **sous-espace propre** associé à λ. C'est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple Soit un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$.

On pose la condition $h(u) = \lambda\cdot u \iff M\cdot u = \lambda\cdot u \iff \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \left(\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & 2\\1 & 2-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}(3-\lambda)x + 2y = 0\\ x + (2-\lambda)y = 0\end{cases}$$

Ce système d'équations admet la solution (0 ; 0) et il ne peut avoir d'autres solutions non nulles que si $D = \mathrm{Det}(M - \lambda I) = \begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0$.

L'ensemble de valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé **spectre** de A.

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)(2-\lambda) - 2\cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4.$$

Nous pouvons maintenant trouver les sous-espaces propres correspondant à ces deux valeurs propres.

Pour $\lambda_1 = 1$:

vecteurs propres associés $u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$.

Sous-espace vectoriel propre : E_1 = droite d'équation $y = -x$.

Pour $\lambda_2 = 4$:

vecteurs propres associés $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$.

Sous-espace vectoriel propre : E_2 = droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.

Théorème 7.3 Un nombre réel λ est une valeur propre de h de matrice $M \Leftrightarrow \text{Det}(M - \lambda I) = 0$

Démonstration Soit λ une valeur propre, alors il existe un vecteur $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul tel que :

Pour simplifier, la démonstration est faite dans un espace à deux dimensions, le passage à n dimensions ne pose pas de problème particulier.

$M \cdot u - \lambda u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(M - \lambda I)u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Or, le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ satisfait également la même relation :

$$M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (M - \lambda I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction représentée par la matrice $M - \lambda I$ n'est donc pas bijective et donc pas inversible $\Rightarrow$ Dét$(M - \lambda I) = 0$.

Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres

C'est en posant Dét$(M - \lambda I) = 0$ que l'on trouve les valeurs propres.

Pour trouver les vecteurs propres associés à ces valeurs propres, il faut résoudre le système $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice 7.7

Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice A relativement à la base canonique.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le nombre 2 est-il une valeur propre de f ?

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Le nombre -3 est-il une valeur propre de f ?

c. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de f ?

d. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de f ?

Exercice 7.8

Déterminez les valeurs et les vecteurs propres des endomorphismes h de $\mathbb{R}^2$ définis par

a. $h((x\,;y)) = (3y\,;x + 2y)$

b. $h((x\,;y)) = \left(-\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y\,;\frac{1}{4}x + y\right)$

Exercice 7.9

Montrez que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par $h((x\,;y)) = (-y\,;x)$ n'admet aucun vecteur propre.

7.5. Diagonalisation

Matrice d'un endomorphisme dans une base de vecteurs propres

Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Nous avions trouvé dans l'exemple précédent :

Valeur propre : $\lambda_1 = 1$, un vecteur propre : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Valeur propre : $\lambda_2 = 4$, un vecteur propre : $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous voulons exprimer la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(u_1 ; u_2)$. La matrice de changement de base est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et son inverse : $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La nouvelle matrice s'exprime donc :

M′ est une matrice diagonale. Sur la diagonale se trouvent les valeurs propres.

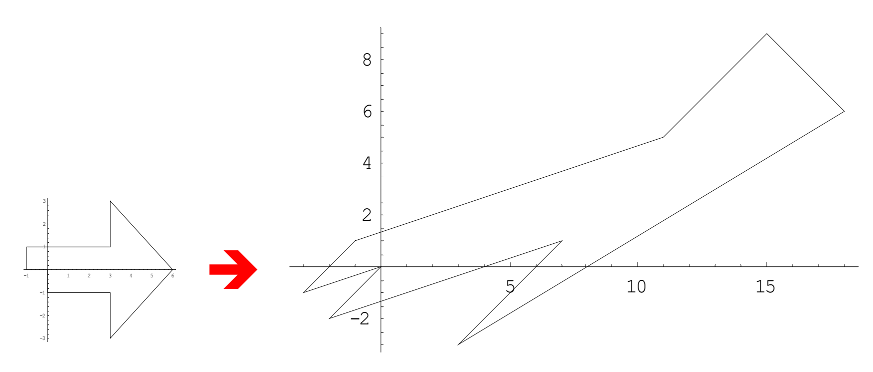
$$M' = P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, par h, le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix} x \\ 4y \end{pmatrix}$.

Géométriquement

Par l'endomorphisme h, on obtient la transformation suivante (on a simplement multiplié tous les points de la flèche par la matrice M) :

$v' = M \cdot v$



Voici ce qui se passe si on travaille dans la base des vecteurs propres. Chaque point de la flèche a été transformé ainsi :

$M = \underbrace{P}_{3.} \cdot \underbrace{M'}_{2.} \cdot \underbrace{P^{-1}}_{1.}$

1. On exprime les coordonnées du point dans la nouvelle base des vecteurs propres. Par exemple, le point (3; 1) s'écrit $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ dans la base (u_1, u_2).
2. On multiplie la coordonnée x par λ_1 et la coordonnée y par λ_2. $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ devient $\left(\frac{1}{3}; \frac{16}{3}\right)$.
3. On revient dans la base canonique. Les nouvelles coordonnées sont (11; 5).

Définition

Un endomorphisme h de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E relativement à laquelle sa matrice est diagonale.

Théorème 7.4

Un endomorphisme h de E est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Les valeurs propres λ_i ne sont pas nécessairement distinctes.

Soit un endomorphisme h de E de dimension n ayant n valeurs propres : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Dans la base de vecteurs propres, la matrice M est une matrice diagonale ($m_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$) dont les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de h.

Intérêt de la diagonalisation

Considérons l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique.

Pour calculer la matrice A^{10} de $h^{10} = h \circ h \circ \ldots \circ h$ (10 termes), il est avantageux de diagonaliser la matrice de h, car le calcul direct de la matrice A^{10} est très long.

Pour rappel, élever une matrice diagonale à la puissance n consiste simplement à élever les termes de la diagonale à la puissance n.

Or, $A^{10} = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot \ldots \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D^{10} \cdot P^{-1}$, car $P^{-1} \cdot P = I$.
D est la matrice diagonale de h et P la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres.

Pour diagonaliser A, on cherche les valeurs propres et les vecteurs propres associés.
L'équation caractéristique de l'endomorphisme h est $\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0$. Elle admet trois solutions, dont deux distinctes, $\lambda_{1,2} = 0$ et $\lambda_3 = 2$.
Comme 0 est une solution double, il existe deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 0 : $u_1 = (1 ; 1 ; 0)$ et $u_2 = (0 ; 2 ; 1)$.
On note $u_3 = (1 ; 1 ; 1)$ un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 2$.

Attention de placer les valeurs propres et les vecteurs propres dans le même ordre dans les matrices D et P.

Relativement à la base $(u_1 ; u_2 ; u_3)$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice de h est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On écrit la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on détermine son inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis on obtient la matrice de h^{10} relativement à la base canonique :



$$A^{10} = P \cdot D^{10} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9 & -2^9 & 2^{10} \\ 2^9 & -2^9 & 2^{10} \\ 2^9 & -2^9 & 2^{10} \end{pmatrix}$$

Exercice 7.10

Un endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

a. Vérifiez que $u_1 = (1 ; -1)$ et $u_2 = (3 ; -1)$ sont deux vecteurs propres de h. Quelles sont les valeurs propres associées ?
b. Écrivez la matrice de passage P de la base des vecteurs propres à la base canonique. Calculez P^{-1}.
c. On note D la matrice de h relativement à la base des vecteurs propres. Écrivez D et vérifiez que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
d. Vérifiez l'égalité $A^2 = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$.
e. Calculez A^5.

7.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Savoir ce qu'est un endomorphisme ❏ ok
Savoir ce qu'est un endomorphisme bijectif ❏ ok
Connaître la technique de changement de base ❏ ok
Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice ❏ ok
Diagonaliser une matrice ❏ ok
Élever une matrice à une grande puissance ❏ ok